

CONTRÔLE 5

2SM1 / 29-03-2026 / L. Lamgouni / Lycée El Waha
Intégrales - Nombres complexes

Exercice 1 (6,5 points)

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{(e^t - 1)^2} dt.$$

1. Étudier le signe de la fonction $F(x)$ pour tout $x \in I$. (0,5 pt)
2. Justifier que F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$. (0,75 pt)
3. Montrer que F est strictement croissante sur I . (0,5 pt)
4. (a) Vérifier que pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, (0,5 pt)

$$\frac{1}{u(u-1)^2} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2}.$$

- (b) En utilisant le changement de variable $u = e^t$, montrer que : (0,75 pt)

$$F(x) = \int_2^{e^x} \frac{1}{u(u-1)^2} du.$$

- (c) En déduire que pour tout $x \in I$: (0,75 pt)

$$F(x) = x - \ln(e^x - 1) - \frac{1}{e^x - 1} + 1 - \ln 2.$$

5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 - \ln 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\infty$. (1,5 pt)
6. Montrer que F réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. (0,75 pt)
7. Dresser le tableau de variations de F^{-1} . (0,5 pt)

Exercice 2 (5,5 points)

On considère la fonction g définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \int_x^{2x} t e^{-\frac{2}{t}} dt & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1. a) Montrer que pour tout $x > 0$ et pour tout $t \in [x, 2x]$: (0,75 pt)

$$x e^{-\frac{2}{x}} \leq t e^{-\frac{2}{t}} \leq 2x e^{-\frac{1}{x}}$$

- b) En déduire que pour tout $x > 0$: (0,75 pt)

$$x^2 e^{-\frac{2}{x}} \leq g(x) \leq 2x^2 e^{-\frac{1}{x}}$$

- c) En déduire que g est continue et dérivable à droite en 0, et préciser $g'_d(0)$. (1,25 pt)

- d) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. (0,75 pt)

2. Montrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$. (2 pt)

Exercice 3 (5,5 points)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère le polynôme :

$$P(z) = z^3 - (1 + 2i \sin \theta)z^2 + (2i \sin \theta - 1)z + 1.$$

où θ est un paramètre réel tel que $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (2i \sin \theta)z - 1 = 0$. (1,5 pt)
2. a) Vérifier que 1 est une racine de P . (0,25 pt)
Déterminer $a, b \in \mathbb{C}$ si l'on sait que $P(z) = (z - 1)(z^2 + az + b)$. (0,5 pt)
b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$. (0,5 pt)
On note z_0 la solution réelle, z_1 la solution de partie réelle positive et z_2 la troisième solution.
3. Écrire sous la forme exponentielle les nombres z_1 , z_2 et $z_1 - z_0$. (1,5 pt)
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 .
 - a) Montrer que les points B et C appartiennent au cercle unité. En déduire la nature du triangle OBC . (0,75 pt)
 - b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle le triangle OBC est équilatéral. (0,5 pt)

Exercice 4 (2,5 points)

1. Montrer que (0,75 pt)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

2. En utilisant une intégration par partie, calculer l'intégrale suivante : (0,75 pt)

$$L = \int_0^1 x e^x dx.$$

3. Donner les racines cubiques de l'unité 1, en forme trigonométrique et algébrique. (1 pt)

Vérifiez soigneusement votre copie avant de la rendre.

Bon courage !